



Artículo / Article

## Crecimiento en diámetro normal para *Pinus* en Durango

### Diameter at breast height growth for *Pinus* in Durango State

Gerónimo Quiñonez Barraza<sup>1</sup>, Héctor Manuel De los Santos Posadas<sup>1</sup> y  
Juan Gabriel Álvarez González<sup>2</sup>

#### Resumen

Los modelos de crecimiento y rendimiento son considerados una herramienta muy valiosa en la planeación y manejo de los bosques, ya que ayudan a proyectar las condiciones futuras del rodal y sirven de base para la elaboración y seguimiento de los programas de manejo forestal. En el presente trabajo se muestran los resultados de la evaluación de tres modelos de crecimiento en diferencia algebraica (ADA) y tres en diferencia algebraica generalizada (GADA) para predecir el crecimiento en diámetro normal, en función de la edad para seis de las principales especies comerciales de pino en Durango. Para el ajuste de los modelos se utilizó información de 44 302 virutas de crecimiento, colectadas de 15 609 sitios del inventario forestal. El modelo polimórfico de Chapman-Richards predice mejor el crecimiento de *Pinus lumholtzii*, el modelo GADA con tasas de crecimiento y asíntotas variables derivado de Strand Generalizado resultó el mejor para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*, mientras que para *Pinus ayacahuite* un modelo GADA basado en Verhulst-Logística predice mejor el crecimiento en diámetro normal. Todos los modelos fueron corregidos por autocorrelación mediante una estructura autorregresiva continua de segundo orden. Los patrones de crecimiento en diámetro sugieren que *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* y *Pinus durangensis* son las especies que presentan las tasas de crecimiento más altas, ya que crecen en condiciones de calidad de estación muy similares, mientras que los patrones de crecimiento de *Pinus teocote* son medios, y *Pinus leiophylla* y *Pinus lumholtzii* registraron las menores tasas de crecimiento porcentual.

**Palabras clave:** Área basal, crecimiento, diámetro normal, incremento, modelo dinámico, *Pinus*.

#### Abstract

Growth and yield models are considered valuable tools in the planning and management of forests since they help to project future stand conditions and provide the basis for most forest management programs. The evaluation of three algebraic difference approach (ADA) and three Generalized Algebraic Difference models (GADA) use to predict growth in diameter at breast height as a function of age for six of the main commercial species *Pinus* in Durango are presented in this paper. All the models fitted by using data from 44 302 increment cores collected at 5 609 forest inventory plots. The polymorphic Chapman -Richards model was the best to predict the dbh growth of *Pinus lumholtzii*; the GADA model with growth rates and asymptotes variables derived from Strand Generalized model was the best for *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* and *Pinus leiophylla*, while for *Pinus ayacahuite* a GADA model based on Logistic-Verhulst model was the best to predict dbh growth. All models were corrected for autocorrelation using a continuous second-order autoregressive structure. The diameter growth patterns suggest that *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* and *Pinus durangensis* have the highest growth rates, while being at similar site conditions, *Pinus teocote* is closer to the global average growth patterns while *Pinus leiophylla* and *Pinus lumholtzii* have the slowest growth rates.

**Key words:** Basal area, growth, diameter at breast heights, increment, dynamic model, *Pinus*.

Fecha de recepción/date of receipt: 23 de junio de 2014; Fecha de aceptación/date of acceptance: 3 de marzo de 2015.

<sup>1</sup> Posgrado forestal, Colegio de Postgraduados, Campus Montecillos. Correo-e: hmsantos@colpos.mx

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería, Unidad de Gestión Forestal Sostenible, Universidad de Santiago de Compostela.

## Introducción

Un bosque manejado es un sistema biológico dinámico en cambio continuo, como resultado de los procesos naturales y de las actividades silvícolas específicas que se llevan a cabo. El uso de los modelos de crecimiento e incremento permite actualizar la información de inventarios forestales, hacer predicciones de incrementos y exploración de opciones de manejo (Falcao y Borges, 2005; Castedo *et al.*, 2007).

En la investigación forestal, predecir el crecimiento de las masas forestales y su respuesta a las intervenciones silviculturales es un tema fundamental. En el manejo forestal se asume que el crecimiento de la masa es predecible (hasta cierto punto) para establecer estrategias en el corto y largo plazo, lo que hace factible anticiparse a las consecuencias de una acción sobre el manejo de los bosques (Castedo *et al.*, 2007).

Los modelos de crecimiento y rendimiento pueden ser clasificados en dos categorías principales: 1) modelos a nivel rodal que usan características, como el área basal, volumen y distribuciones diamétricas, para simular el crecimiento y rendimiento del rodal; 2) modelos de árbol individual que utilizan a los árboles como la unidad básica para la simulación del crecimiento y mortalidad; los valores a nivel rodal son estimados al sumar las estimaciones de todos los individuos (Peng, 2000). La ventaja de emplear modelos de árbol individual es que el rodal puede ser ilustrado con más profundidad y con mayor diversidad de tratamientos y son dependientes o independientes de la distancia (Trasobares *et al.*, 2004).

La técnica para derivar ecuaciones dinámicas conocida como método de diferencia algebraica (ADA), involucra esencialmente la sustitución de un parámetro del modelo base para expresarlo como una función del índice de sitio o de una condición inicial de la variable de interés (en este caso el diámetro normal). Con la aplicación de esa metodología se asume que las condiciones iniciales contienen suficiente información acerca de la trayectoria de las masas forestales para realizar estimaciones exactas (Amaro *et al.*, 1998).

La principal limitación de la metodología ADA consiste en que los modelos derivados únicamente admiten una hipótesis de crecimiento respecto a los parámetros; es decir, se tiene una sola asíntota común (modelos polimórficos) o se tienen asíntotas variables (modelos anamórficos), pero no es posible incluir ambas hipótesis en un modelo (Bailey y Clutter, 1974). El método de las ecuaciones de diferencias algebraicas generalizado (GADA), se basa en que la ecuación base puede ser expandida de acuerdo con diversas teorías sobre el crecimiento, como la tasa de crecimiento y la potencialidad máxima, lo que permite que más de un parámetro de cada modelo dependa del sitio, y así las familias de curvas de crecimiento son más flexibles (Cieszewski y Bailey, 2000; Cieszewski, 2001).

## Introduction

A managed forest is a dynamic biological system continuously changing as a result of natural processes and specific forestry activities taking place. The use of growth models allows updating and increasing forest inventory information, making increment predictions and exploration of management options (Falcao and Borges, 2005; Castedo *et al.*, 2007).

In forest research, predicting the growth of forests and their response to silvicultural operations is a fundamental issue. In forest management it is assumed that the mass growth is predictable (to some extent) to establish strategies in the short and long term, making it feasible to anticipate the consequences of an action on forest management (Castedo *et al.*, 2007).

The growth and yield models can be classified into two main categories: 1) Models stand level using stand characteristics such as basal area, volume and diameter distributions to simulate growth and yield of the stand; 2) Individual tree models using trees as the basic unit for simulating the growth and mortality; to stand level values are estimated by adding the estimates of all trees (Peng, 2000). The advantage of using individual tree models is that the stand can be illustrated in greater depth and with greater diversity of treatments and may be dependent or independent of the distance (Trasobares *et al.*, 2004).

The technique to derive dynamic equations known as a method of algebraic difference (ADA) essentially involves the replacement of a parameter of the base model to express it as a function of site index or an initial condition of the variable of interest (in this case the normal diameter). By using this methodology it is assumed that the initial conditions contain enough information about the trajectory of forests to make estimates accurately (Amaro *et al.*, 1998).

The main limitation of the ADA methodology is that derivatives models only support a hypothesis of growth with respect to the parameters, *i. e.*, there is one common asymptote (polymorphic models) or variable asymptotes (anamorphic models), but it is not possible to include both hypotheses in a model (Bailey and Clutter, 1974). The method of generalized algebraic difference equations (GADA), is based on the basic equation can be expanded according to various theories on growth, as the growth rate and maximum potential, allowing more than one parameter each dependent model of the site, and thus the growth curve families are more flexible (Cieszewski and Bailey, 2000; Cieszewski, 2001). GADA the methodology can obtain families of curves with multiple polymorphism and asymptotes (Cieszewski, 2002; Cieszewski, 2004).

The aim of this work was to develop dynamic equations of growth and increase in average diameter, with the algebraic difference and generalized algebraic difference (ADA and GADA) for *Pinus arizonica* Engelm., *Pinus durangensis* Martínez,

Con la metodología GADA se obtienen familias de curvas con polimorfismo y múltiples asíntotas (Cieszewski, 2002; Cieszewski, 2004).

El objetivo del presente trabajo fue desarrollar ecuaciones dinámicas de crecimiento e incremento en diámetro normal, con la diferencia algebraica y la diferencia algebraica generalizada (ADA y GADA), para *Pinus arizonica* Engelm., *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schltdl. et Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham, *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen en el ejido San Diego de Tezains, Durango, México, a partir de información de 44 302 virutas de crecimiento, distribuidas en árboles dominantes, intermedios y suprimidos de 15 609 sitios temporales de inventario de manejo forestal.

## Materiales y Métodos

### El área de estudio

La base de datos utilizada estuvo integrada por muestras tomadas de masas forestales del ejido San Diego de Tezains, en el estado de Durango, México, que se ubica en la Sierra Madre Occidental, entre las coordenadas extremas 24°48'16.98", 25°13'47.25" N y 105°53'09.81", 106°12'52.58" O. Los tipos de climas predominantes en el lugar son templado, cálido húmedo y templado subhúmedo, con una precipitación media anual de 1 375 mm. Las temperaturas medias varían desde los 8 °C en las zonas más altas, hasta los 24 °C en las zonas bajas, en las cuales la altitud media llega a 600 m (García, 1981).

### Base de datos

Se utilizó una base de datos del inventario de manejo forestal del año 2006 (PMF, 2006) de 44 302 virutas de crecimiento de árboles a la altura de 1.30 m extraídas con un taladro de Pressler. Se recolectaron tres virutas de crecimiento por cada sitio de inventario forestal distribuidos mediante un diseño de muestreo aleatorio estratificado. Las muestras se obtuvieron de árboles considerando la clasificación de copas de Kraft, que define la dominancia de los árboles en el piso forestal (Kraft, 1884). En el caso de que un árbol dominante-codominante, un intermedio y un suprimido no encontraran definida su posición en la estructura vertical dentro del sitio, se consideró un árbol de diámetro mayor, uno de diámetro medio y uno de diámetro menor. Las muestras fueron obtenidas para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* y *Pinus ayacahuite* como especies comerciales distribuidas en los sitios de muestreo.

El análisis de las virutas de crecimiento se desarrolló de acuerdo al siguiente procedimiento: i) se contabilizó el número de anillos en la viruta (NS) del centro hacia la corteza; ii) se

*Pinus teocote* Schltdl. et Cham., *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham., *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer and *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen in the *Ejido San Diego Tezains*, Durango, Mexico, from 44 302 information growth cores, distributed in dominant, intermediate and suppressed trees from 15 609 temporary sites of forest management inventory.

## Materials and Methods

### The study area

The database used was composed of samples taken from forests of *Ejido San Diego Tezains*, in the State of Durango, Mexico, located in the *Sierra Madre Occidental*, between the extreme coordinates 24°48'16.98", 25°13'47.25" N y 105°53'09.81", 106°12'52.58" W. The local predominant types of climates are temperate, warm temperate humid and humid, with an average annual rainfall of 1 375 mm. Average temperatures range from 8 °C in the highest areas, up to 24 °C in the lowlands, where the average altitude reaches 600 m (García, 1981).

### Database

A database of a 2006 forest management inventory (PMF, 2006) of which 44 302 tree growth cores extracted from a height up to 1.30 m with a Pressler drill was used. Three of them were collected for each site of the forest inventory distributed by using a stratified random sampling design. Samples were taken from trees considering the classification of crowns by Kraft, which defines the dominance of trees in the forest floor (Kraft, 1884). When a dominant-codominant, an intermediate and a suppressed tree could not fit into the vertical structure, a high diameter tree, one of middle diameter and one of a small diameter were considered. Samples were obtained for the commercial species distributed in the sampling sites, *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* and *Pinus ayacahuite*.



utilizó una categoría de edad de 10 años (CE=10); iii) se dividió el número de anillos entre la categoría de edad para definir los grupos de anillos (GA=NS/CE) y redondear el resultado para obtener el número de anillos por grupo (GA) y la fracción como el residual (R); iv) se contó el número del residual (R) del centro hacia la corteza y posteriormente los grupos de anillos. Si se toma como ejemplo una viruta con 24 anillos de crecimiento, el  $GA=24/10=2.4$ ,  $GA=2$  y  $R=4$  (Figura 1); por lo tanto, se contabilizaron cuatro anillos del centro hacia la corteza como residual y a partir de ahí 10 grupos de 2 anillos. Se midieron los radios  $R_1 - R_{10}$ , los cuales fueron convertidos a diámetros.

The analysis of the growth cores develops according to the following procedure: i) the number of rings was recorded on the chip (NS) from the center to the bark; ii) an age of 10 years (CE = 10) was used; iii) the number of rings between the age group was divided to define the groups of rings (GA= NS/EC), rounding the result to get the number of rings per group (GA) and the fraction as the residual (R); iv) the number of residual (R) from the center to the bark and subsequently ring groups were counted. If a core with 24 growth rings is taken as an example, the  $GA = 24/10 = 2.4$ ,  $GA = 2$  and  $R = 4$  (Figure 1); therefore, four rings from the center to the bark as residual and

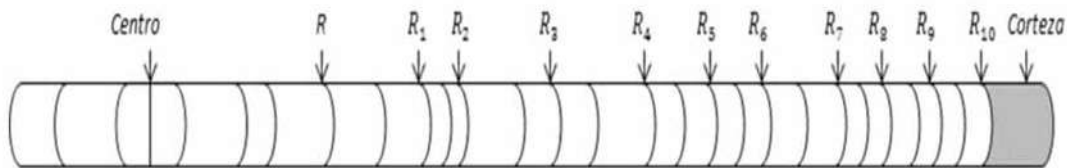


Figura 1. Análisis de una viruta de crecimiento.  
Figure 1. Analysis of a growth core.

En el Cuadro 1 se presentan los estadísticos descriptivos de la base de datos utilizada para el ajuste de los modelos de crecimiento, el número de árboles usados (virutas de crecimiento) y el total de pares de observaciones (Dn-Edad) incorporadas al ajuste para las especies de interés.

from there on, 10 groups of two rings were counted. The  $R_1 - R_{10}$  radii were measured, which were subsequently converted to diameters.



Cuadro 1. Valores de los estadísticos descriptivos de la base de datos utilizada.  
Table 1. Descriptive statistics values of the data base of the data that were used.

Especie	Árboles	Datos	Variable	Mínimo	Máximo	Media	SD
<i>Pinus arizonica</i> Engelm.	4 525	45 250	Dn	0.60	59.40	14.16	8.45
			E	1.00	275.00	39.89	27.59
<i>Pinus durangensis</i> Martínez	17 956	179 560	Dn	0.40	61.80	13.55	8.09
			E	1.00	293.00	41.80	31.45
<i>Pinus teocote</i> Schltdl. et Cham.	11 095	110 950	Dn	0.20	59.80	13.42	7.92
			E	1.00	288.00	40.66	29.78
<i>Pinus leiophylla</i> Schlecht et Cham	4 206	42 060	Dn	0.20	53.00	13.19	7.44
			E	2.00	217.00	39.64	25.58
<i>Pinus lumholtzii</i> Rob. et Fer	2 658	26 580	Dn	0.60	54.80	12.05	7.13
			E	2.00	269.00	45.78	33.40
<i>Pinus ayacahuite</i> Ehrenb. var. <i>brachypter</i> Shawen	3 862	38 620	Dn	0.60	68.00	11.28	6.76
			E	2.00	263.00	31.58	20.86

Dn = diámetro normal (cm); E= edad (años); SD = desviación estándar de la media.  
Dn = normal diameter (cm); E=age (years); SD = standard deviation of the mean.



### Modelos utilizados

Se utilizaron modelos de crecimiento para diámetro normal en función de la edad en forma ADA y GADA (Cuadro 2) derivados de modelos de crecimiento base (Zeide, 1993; Kiviste *et al.* 2002), los cuales han sido comúnmente usados en la modelación de diferentes variables (diámetro, área basal, altura y altura dominante) a partir de la edad para diferentes especies forestales (Amaro *et al.*, 1998; Cieszewski, 2002; Barrio y Diéguez, 2005; Krumland y Eng, 2005; De los Santos *et al.*, 2006; Álvarez *et al.*, 2010; Sharma *et al.*, 2011).

Para obtener la expresión del incremento corriente anual (ICA) para los modelos estudiados, a partir de que  $D_t = f(D_0, t_0, t_1)$ , se originó el diámetro normal con respecto a la edad,  $\frac{\partial D_t}{\partial t_1}$ , para representar la tasa instantánea de incremento en diámetro.

Cuadro 2. Modelos de crecimiento ajustados a las especies comerciales estudiadas.  
Table 2. Growth models fit to the studied commercial species.

Modelo	Modelo base	Parámetro específico	Solución	Modelo dinámico
<i>Hoosfeld IV (Zeide, 1993)</i>				
M1	$D = \frac{t^{\alpha_3}}{\alpha_2 + \frac{t^{\alpha_3}}{\alpha_1}}$	$\alpha_2$	$\alpha_2 = \frac{t_0^{\alpha_3} (\alpha_1 - D_0)}{D_1 \alpha_1}$	$D_1 = \frac{t_1^{\alpha_3}}{\frac{t_0^{\alpha_3} (\alpha_1 - D_0)}{D_0 \alpha_1} + \frac{t_1^{\alpha_3}}{\alpha_1}}$
<i>Levakovic II (Levakovic, 1935)</i>				
M2	$D = \alpha_1 \left( \frac{t}{\alpha_2 + t} \right)^{\alpha_3}$	$\alpha_2$	$\alpha_2 = t_0 \left[ -1 + \left( \frac{D_0}{\alpha_1} \right)^{-\frac{1}{\alpha_3}} \right]$	$D_1 = \alpha_1 \left[ \frac{t_1}{t_0 \left[ -1 + \left( \frac{D_0}{\alpha_1} \right)^{-\frac{1}{\alpha_3}} \right] + t_1} \right]^{\alpha_3}$
<i>Chapman-Richards (Richards, 1959)</i>				
M3	$D = \alpha_1 (1 - e^{-\alpha_2 t})^{\alpha_3}$	$\alpha_2$	$\alpha_2 = - \frac{\ln \left[ 1 - \left( \frac{D_0}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_3}} \right]}{t_0}$	$D_1 = \alpha_1 \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{D_0}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_3}} \right)^{\frac{t_1}{t_0}} \right]^{\alpha_3}$ (Amaro, 1998)
<i>Strand Generalizado (Strand, 1964)</i>				
M4	$D = \left( \frac{t}{\alpha_1 \alpha_2^j} \right)^{\alpha_3}$	$\alpha_1 = x$ $\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ $\alpha_3 = \beta_3$	$x = \frac{t_0 \left( D_0^{-\frac{1}{\beta_3} - \beta_1} \right)}{1 + \beta_2 t_0}$	$D_1 = \left[ \frac{t_1}{x + (\beta_1 + \beta_2 x) t_1} \right]^{\beta_3}$ (Sharma <i>et al.</i> , 2011)
<i>Hossfel IV (Peschel, 1938)</i>				
M5	$D = \frac{t^{\alpha_1}}{\alpha_2 \alpha_3^{\alpha_1}}$	$\alpha_1 = \beta_3$ $\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 x$ $\alpha_3 = x$	$x = \frac{\frac{t_0^{\beta_3}}{D_0} - \beta_1}{\beta_2 + \frac{t_0^{\beta_3}}{D_0}}$	$D_1 = \frac{t_1^{\beta_3}}{\beta_1 + \beta_2 x + x t_1^{\beta_3}}$ (Krumland y Eng, 2005)
<i>Verhulst- Logistica (Verhulst, 1838)</i>				
M6	$D = \frac{\alpha_1}{(1 + \alpha_2 e^{\alpha_3 t})}$	$\alpha_1 = \beta_1 + x$ $\alpha_2 = \beta_2 x$ $\alpha_3 = \beta_3$	$x = \frac{D_0 \beta_1}{1 - \beta_2 D_1 t_0^{\beta_3}}$	$D_1 = \frac{\beta_1 + x}{1 + \beta_2 x t_1^{\beta_3}}$ (Álvarez <i>et al.</i> , 2010)

Table 1 shows the descriptive statistics of the data base that was used for the growth model fit, the number of used trees (growth cores) and the total pair observations (Dn-Age) used in the fit for the considered species.

### Utilized models

Growth models for normal diameters were used according to age in the ADA and GADA form (Table 2), derived from growth models reported by Zeide (1993) and Kiviste *et al.* (2002), which have been regularly used in modelling different variables (diameter, basal area, height and dominant height) in terms of age for forest species (Amaro *et al.*, 1998; Cieszewski, 2002; Barrio and Diéguez, 2005; Krumland and Eng, 2005; De los Santos *et al.*, 2006; Álvarez *et al.*, 2010; Sharma *et al.*, 2011).

Para la interpretación de los modelos dinámicos, se consideró como Índice de Diámetro (IDiam) al diámetro medio, que alcanza una masa forestal a la edad de referencia de 60 años o el índice que representa cada árbol en función de su diámetro y edad a una edad de referencia, lo cual implica el aspecto de producción e indirectamente el de productividad.

### Metodología de ajuste de los modelos

Los modelos ajustaron simultáneamente los parámetros globales y específicos del sitio con el procedimiento "nested iterative procedure" descrito por Tait *et al.*, (1988) y con una edad de referencia de 60 años, el método consiste en el siguiente proceso iterativo: i) se ajustaron los parámetros globales para cada modelo estudiado, usando valores iniciales de diámetro normal de 25 cm ( $D_0$ ) para cada árbol (viruta de crecimiento), el valor del diámetro normal fue definido como la categoría diamétrica promedio de los árboles a la edad de referencia de 60 años, ii) los valores de los parámetros globales se consideran como constantes y el parámetro específico del sitio ( $D_0$ ) se estima por individuo. Los valores observados para cada árbol ( $D_0$ ) son usados como valores de inicio para el procedimiento de ajuste. Después, los estimados ( $D_1$ ) se convierten en valores observados y los parámetros globales son ajustados nuevamente. El procedimiento se repite hasta estabilizar los parámetros globales (Cieszewski *et al.* 2000). En este estudio se utilizó como criterio que la reducción del error medio cuadrático del modelo entre dos iteraciones fuera menor de 0.0001 (Vargas *et al.*, 2010).

El problema de autocorrelación de los errores, debido al uso de datos longitudinales de las virutas de crecimiento, fue corregido con una estructura de errores autorregresiva modificada de segundo orden CAR (2), la cual consideró la distancia entre las mediciones del diámetro en las virutas de crecimiento (Zimmerman y Núñez, 2001).

$$e_{ij} = d_1 \rho_1^{h_{ij} - h_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \rho_2^{h_{ij} - h_{ij-2}} e_{ij-2} + \epsilon_{ij}$$

Donde:

- $e_{ij}$  =  $j$  residual ordinario en la observación  $i$
- $d_1 = 1$  para  $j > 1$
- $d_2 = 1$  para  $j > 2$
- $d_1 = 0$  para  $j = 1$
- $d_2 = 0$  para  $j \leq 2$
- $h_{ij} - h_{ij-1}$  y  $h_{ij} - h_{ij-2}$  = Distancias de separación de la  $j$  a la  $j-1$  y de la  $j$  a  $j-2$  observaciones dentro de cada viruta de crecimiento
- $h_{ij} > h_{ij-1}$  y  $h_{ij} > h_{ij-2}$ ,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  = Parámetros autorregresivos de primero y segundo orden a ser estimados
- $\epsilon_{ij}$  = Error independiente que sigue una distribución normal con media cero y varianza constante

To obtain the current annual increment for the studied models, starting from  $D_t = f(D_0, t_0, t_1)$ , the normal diameter in regard to age  $\frac{\partial D_t}{\partial t}$  surged, to represent the instantaneous growth rate in diameter.

For the interpretation of the dynamic models, the Diameter Index (IDiam), the average or mean diameter was considered as it achieves a forest mass at the reference age of 60 years or the index that refers to each tree in regard to its diameter or age at the reference time, which implies the production aspect, and indirectly that of yield.

### Fitting methodology models

The models fitted simultaneously global and site-specific parameters following the "nested iterative procedure" described by Tait *et al.* (1988) and with a reference age of 60, the method comprising the following iterative process: 1) global parameters for each studied model were fit, by using initial values of normal diameter of 25 cm  $D_0$  for each tree (core growth), the value of the normal diameter was defined as the average diameter class of trees at the reference age of 60; ii) the values of the global parameters are considered as constants and site specific parameter ( $D_0$ ) was estimated for each tree. The observed values for each tree ( $D_0$ ) are used as starting values for the fitting procedure. Then, the estimated values ( $D_1$ ) become observed values and global parameters are fitted again. The process is repeated until the global parameters are stabilized (Cieszewski *et al.*, 2000). The reduction of the mean square error of the model between two iterations being less than 0.0001 was used as a criterion in this study (Vargas *et al.*, 2010).

The autocorrelation problem of errors due to the use of longitudinal data from the growth cores was corrected with a second order CAR (2) modified autoregressive errors structure, which considered the distance between the diameter measurements in the growth cores (Zimmerman and Núñez, 2001).

$$e_{ij} = d_1 \rho_1^{h_{ij} - h_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \rho_2^{h_{ij} - h_{ij-2}} e_{ij-2} + \epsilon_{ij}$$

Where:

- $e_{ij}$  =  $j$  ordinary residual in the  $i$  observation
- $d_1 = 1$  for  $j > 1$
- $d_2 = 1$  for  $j > 2$
- $d_1 = 0$  for  $j = 1$
- $d_2 = 0$  for  $j \leq 2$
- $h_{ij} - h_{ij-1}$  and  $h_{ij} - h_{ij-2}$  = Separation distances of  $j$  to  $j-1$  and  $j-1$  of  $j$  to  $j-2$  observations within each growth core and
- $h_{ij} > h_{ij-1}$  and  $h_{ij} > h_{ij-2}$ ,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  = First and second order autoregressive parameters to be estimated
- $\epsilon_{ij}$  = Independent error that follow a normal distribution with a zero mean and a constant variance

Con el uso de una estructura autorregresiva de errores se obtienen estimadores de los parámetros eficientes e insesgados (Parresol y Vissage, 1998).

Los modelos de crecimiento en diámetro normal, más la estructura del modelo autorregresivo de segundo orden fueron programados y ajustados simultáneamente con el procedimiento modelo de SAS/ETS<sup>MR</sup> (SAS, 2004), que permite la actualización dinámica de los residuales.

### Estadísticos utilizados para medir el ajuste

La bondad de ajuste de los modelos estudiados se midió a través del análisis numérico y gráfico de los residuales, con la obtención de estadísticos como el coeficiente de determinación ajustado ( $R^2_a$ ), la raíz del cuadrado medio del error (RMSE), el sesgo promedio absoluto (S), el coeficiente de variación expresado en porcentaje (CV) y el criterio de información de Akaike (AIC), para el cual se utilizó la versión de mínimos cuadrados ordinarios (Lu and Zhang, 2011). Además, se analizaron gráficamente las predicciones de los modelos para interpretar si eran biológicamente realistas a los datos utilizados (Goelz y Burk, 1992; Sharma *et al.*, 2011).

Para medir la presencia de autocorrelación en los datos usados en el ajuste de los modelos, se aplicó la prueba de *Durbin-Watson* (Durbin y Watson, 1971), se calculó el estadístico mediante el procedimiento siguiente: i) modelo dinámico, ii) modelo dinámico más estructura autorregresiva de primer orden y iii) modelo dinámico más estructura autorregresiva de segundo orden.

$$R^2_a = 1 - \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n - p}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / n - 1} \right]$$

$$RMSE = \left( \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p} \right)^{0.5}$$

$$S = \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \right|$$

$$CV = \left[ \frac{(\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n - 1)^{0.5}}{\bar{y}} \right] * 100$$

$$AIC = 2p + n \left[ \ln \left( \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \right) \right]$$

With the use of an autoregressive errors structure estimators of efficient and unbiased parameters are found (Parresol and Vissage, 1998).

The growth models in normal diameter, plus the structure of the second order autoregressive models were simultaneously programmed and fitted with the SAS/ETS<sup>TM</sup> model (SAS, 2004), which allows the updating of the residuals dynamics.

### Statistics used to measure the goodness of fit

The goodness of fit of the models was measured using the numeric and graphical analysis of the residuals, with the collection of statisticals as the fitted coefficient of determination ( $R^2_a$ ), the root mean square error (RMSE), the absolute mean bias (S), the coefficient of variation expressed as a percentage (CV) and the Akaike information criterion (AIC), for which the version of ordinary least squares (Lu and Zhang, 2011) was used. In addition, the predictions of the models were graphically analyzed to see if they were biologically realistic compared to the data that were used (Goelz and Burk, 1992; Sharma *et al.*, 2011).

To measure the presence of autocorrelation in the used data for the fit of the models, the *Durbin-Watson* test (Durbin and Watson, 1971) was used, the calculation of the statistics was made by the following procedure: i) dynamic model, ii) dynamic model plus first order autoregressive structure and iii) dynamic model plus second order autoregressive structure.

$$R^2_a = 1 - \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n - p}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / n - 1} \right]$$

$$RMSE = \left( \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p} \right)^{0.5}$$

$$S = \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \right|$$

$$CV = \left[ \frac{(\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n - 1)^{0.5}}{\bar{y}} \right] * 100$$

$$AIC = 2p + n \left[ \ln \left( \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \right) \right]$$

$$dw = \frac{\sum_{i=2}^n (r_i - \bar{r}_i)^2}{\sum_{i=2}^n r_i^2}$$

Donde:

$y_i$ ,  $\hat{y}$  e  $\bar{y}$  = Observado, predicho y medio en número de árboles por categoría diamétrica  
 $n$  = Número de observaciones  
 $p$  = Número de parámetros del modelo  
 $r$  = Residual del modelo ajustado.

$$dw = \frac{\sum_{i=2}^n (r_i - \bar{r}_i)^2}{\sum_{i=2}^n r_i^2}$$

Where:

$y_i$ ,  $\hat{y}$  and  $\bar{y}$  = Observed, predicted and mean number of trees per diametric class  
 $n$  = Number of observations  
 $p$  = Number of parameters of the model  
 $r$  = Residual of the fitted model

## Resultados y Discusión

En el Cuadro 3 se reúnen los valores de los estimadores de los parámetros y los estadísticos de ajuste de los modelos analizados para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* y *Pinus ayacahuite*. En general los seis modelos ajustados a las especies mostraron bondad de ajuste estadística satisfactoria y fueron biológicamente realistas (análisis gráfico de las predicciones de los modelos a los datos observados) para predecir el crecimiento en diámetro normal, en función de la edad. Los ajustes se hicieron con modelos ADA (Bailey y Clutter, 1974) y GADA (Cieszewski y Bailey, 2000) bajo el procedimiento iterativo para la obtención de estimadores de los parámetros globales y específicos (Cieszewski *et al.*, 2000). Para todos los casos los parámetros fueron altamente significativos a un nivel de significancia de 1 %, con valores de probabilidad de rechazo menores a 0.0001. El uso del error medio cuadrático del modelo como criterio para estabilizar el proceso iterativo de ajuste, cuando este fuera menor a 0.0001 entre un paso anterior y el siguiente (Vargas *et al.*, 2010), reflejó la disminución en el error del modelo y evitó que los valores de los estimadores de los parámetros estuvieran en un mínimo local, similar a lo que propuso Cieszewski *et al.* (2000) con el uso del criterio de convergencia de los parámetros de 0.0000001. La estructura autorregresiva continua "CAR (2)" corrigió la autocorrelación positiva debida a los datos longitudinales usados en el ajuste de los modelos dinámicos, resultados similares a los de Barrio y Diéguez (2005) y de Vargas *et al.* (2010) en sus estudios de modelación de altura dominante e índice de sitio.

El modelo M3 predice mejor el crecimiento del diámetro normal para *Pinus lumholtzii*; el M4 para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*, mientras que para *Pinus ayacahuite* el M6 presentó mejor ajuste (Cuadro 3). En la Figura 2 se exhiben las familias de curvas de crecimiento en diámetro normal por IDiam construidas con los modelos seleccionados; las familias obtenidas muestran tasas relativas de crecimiento y potencialidades del sitio variables para las especies *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*, modeladas con M4; para *Pinus ayacahuite* con el modelo M6 (polimórficas con asíntotas variables), mientras que

## Results and Discussion

Table 3 shows the values of the estimates of the parameters and fit statistics of the models analyzed for *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* and *Pinus ayacahuite*. Overall, the six fitted models at six species showed satisfactory statistical goodness of fit and were biologically realistic (graphical analysis of model predictions to observed data) to predict the growth in average diameter as a function of age; adjustments were made with ADA models (Bailey and Clutter, 1974) and GADA (Cieszewski and Bailey, 2000) under the iterative procedure for obtaining estimates of global and specific parameters (Cieszewski *et al.*, 2000). In all cases the parameters were highly significant at a significance level of 1 %, with probability refusal values below 0.0001. Using the model's mean square error criterion to stabilize the iterative fitting process when it was under 0.0001 between a previous step and the next (Vargas *et al.*, 2010), reflected the decrease in model error and avoided the values of the estimates of the parameters were in a local minimum, similar to that proposed by Cieszewski *et al.* (2000) of using the convergence criterion of the 0.0000001 parameters. The "CAR (2)" continuous autoregressive structure corrected the positive autocorrelation due to longitudinal data used in the setting of dynamic models similar to those of Barrio and Diéguez (2005) and Vargas *et al.* (2010) results in their studies modeling dominant height and site index.

The M3 model better predicts the growth in normal diameter for *Pinus lumholtzii*; M4 was better for *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* and *Pinus leiophylla*, while for *Pinus ayacahuite*, M6 showed the best fit (Table 3). Figure 2 shows the families of normal diameter growth by IDiam constructed with the selected models; these families have relative growth rates and variable site potentials for *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote* and *Pinus leiophylla*, modeled with M4; for *Pinus ayacahuite* with the M6 model (polymorphic variable asymptotes), while for *Pinus lumholtzii* with the M3 model were generated families of curves with variable growth rates and potentialities of constant sites (common asymptote). For *Pinus durangensis* values for the Durbin-Watson (dw) statistic were found in: i) dynamic model (0.67), ii) dynamic



para *Pinus lumholtzii* con el modelo M3 se generaron familias de curvas con tasas de crecimiento variables y potencialidades del sitio constantes (asíntota común). Para *Pinus durangensis* se identificaron valores del estadístico de Durbin-Watson (dw) en: i) modelo dinámico (0.67), ii) modelo dinámico más estructura autorregresiva de primer orden (1.49), y iii) modelo dinámico más estructura autorregresiva de segundo orden (1.80), para *Pinus arizonica*, *Pinus teocote* y *Pinus leiophylla*; con el modelo M4 se determinaron valores de la prueba dw de (0.65, 1.44 y 1.76), (0.67, 1.47 y 1.79) y (0.68, 1.48 y 1.81), respectivamente; para *Pinus lumholtzii* con el modelo M3 valores de 0.66, 1.48 y 1.80; y para *Pinus ayacahuite* 0.67, 1.49 y 1.80 con el modelo M6, respectivamente para el procedimiento de ajuste. Las familias de curvas de crecimiento en Diámetro normal (Dn) se construyeron con IDiam de 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 y 45 cm a la edad de referencia de 60 años, las gráficas muestran que las familias de curvas de crecimiento se adaptan bien a las trayectorias mostradas por los datos utilizados en el ajuste.

En el Cuadro 4 se presentan las ecuaciones obtenidas para el cálculo del incremento corriente anual (ICA) en diámetro normal, para los modelos seleccionados. La Figura 3 ilustra las familias de IMA en área basal (AB) con respecto al crecimiento en diámetro por IDiam. Se puede apreciar el máximo IMA de las curvas con IDiam mayor a 25 cm. El criterio de IMA en AB ayudó a definir el turno técnico en diámetro; no fue posible determinar el punto de unión entre el ICA e IMA por IDiam debido a las variaciones en las tasas de crecimiento, y que a lo largo de la vida de los árboles el crecimiento diamétrico puede exhibir interrupciones bruscas (Pereira da Silva *et al.*, 2002). El criterio de IMA en AB permite establecer objetivos de producción maderable para bosques incoetáneos con manejo irregular y ayuda a explicar los cambios en el diámetro, así como evaluar las tasas de producción de madera a través del tiempo (Worbes, 1995; López *et al.*, 2006).



model plus autoregressive first order structure (1.49), and iii) dynamic model plus autoregressive second order structure (1.80), for *Pinus arizonica*, *Pinus teocote* and *Pinus leiophylla*; with the values of the M4 model, numbers for the dw test were found (0.65, 1.44 and 1.76), (0.67, 1.47 and 1.79) and (0.68, 1.48 and 1.81) were found respectively for the *Pinus lumholtzii* with the M3 model, values were 0.66, 1.48 and 1.80 and for *Pinus ayacahuite*, 0.67, 1.49 and 1.80 respectively, with the M6 model for the fitting procedure. The families of growth curves of normal diameter (Dn) were constructed with IDiam of 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 and 45 cm at the reference age of 60 years, the graphs show that these families are well suited to the tracks shown by the data used in the fitting.

Table 4 shows the obtained equations for calculating the current annual increment (ICA for its acronym in Spanish) in dbh, for the selected models. Figure 3 illustrates the IMA families in basal area (AB) against the growth in diameter by IDiam. The maximum IMA curves over 25 cm IDiam can be appreciated. The criterion of IMA in AB helped determine the technical shift in diameter; it was not possible to find the junction between the ICA and IMA by IDiam because the diameter has growth upsets over the life of the trees and variations in growth rates (Pereira da Silva *et al.*, 2002). The criterion of IMA in AB allows to set goals for uneven-aged timber production forests with irregular management and helps to explain changes in diameter and assess rates of timber production over time (Worbes, 1995; López *et al.*, 2006).

In Table 5 are shown the average pass times of the diametric classes of 5 cm for the studied species, calculated through the reflection of Age 2 of the selected growth model for each species, projecting the growth in diameter to pass from on a lower diametric category (CDI) to a higher diametric category (CDS) and thus obtaining the age at which growth takes place. The initial data of Diameter 0 and Age 0 were the age averages by diametric category of the first quartile of the data base that was used; Diameter 1 was the upper diametric category for which the pass time was calculated (years).

With the information of the growth cores from the operational inventory it was possible to make a reconstruction of growth and increment in diameter of the studied forest species, since individual increases or their average for a specific site or stand can be obtained; the weakness is that in some trees, growth rings are not completely formed (Clark *et al.*, 2007).

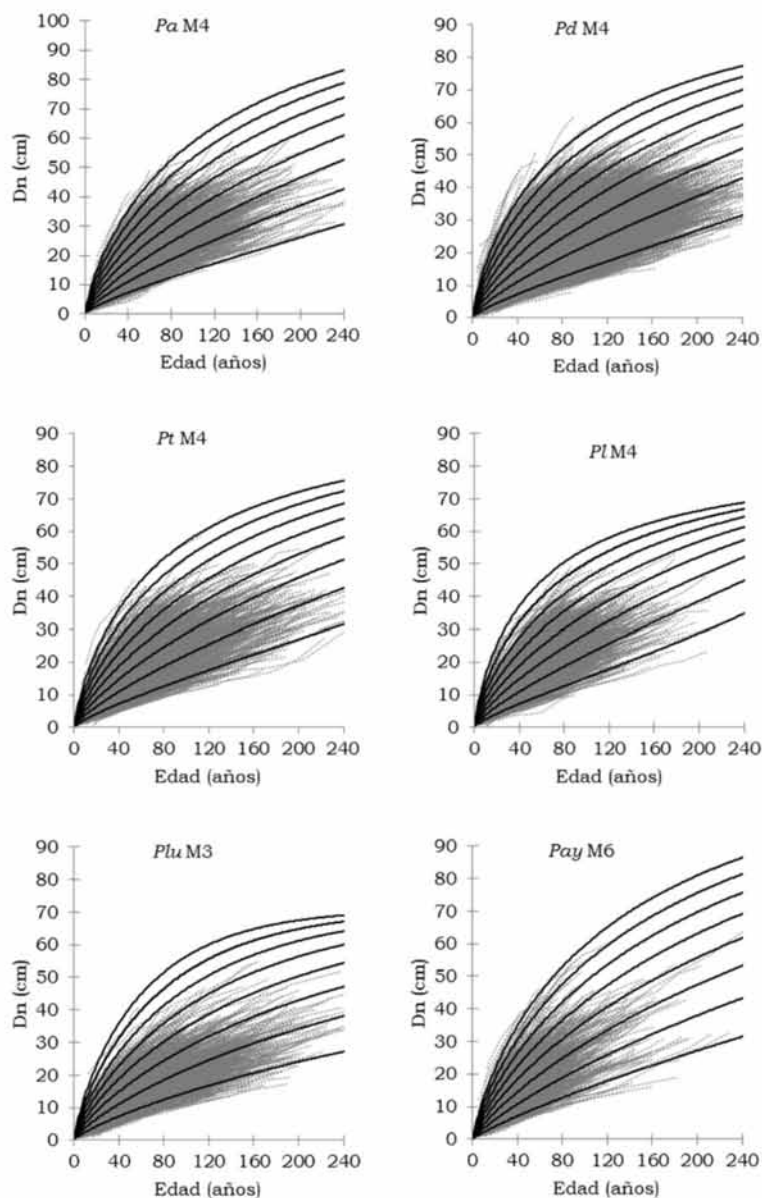


Cuadro 3. Parámetros estimados y estadísticos de los modelos ajustados.  
Table 3. Estimated parameters and statistics of the fitted models.

SP	Modelo	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\rho_1$	$\rho_2$	R <sup>2</sup> a	RMSE	AIC	CV	S
Pa	M1	284.88	0.76				0.99	0.95	0.99	0.81	-19310	5.52	0.011
	M2	172.01	0.75				0.99	0.95	0.99	0.81	-19376	5.51	0.011
	M3	106.78	0.75				0.99	0.95	0.99	0.81	-19403	5.51	0.011
	M4			0.002	-0.001	0.74	0.99	0.95	0.99	0.81	-19610	5.45	0.011
	M5			1.323	-196.25	0.74	0.99	0.95	0.99	0.81	-19481	5.51	0.009
	M6			177.57	1.474	0.74	0.99	0.95	0.99	0.81	-19536	5.50	0.009
Pd	M1	241.48	0.77				0.99	0.96	0.99	0.75	-105370	5.50	0.006
	M2	156.67	0.76				0.99	0.96	0.99	0.75	-105678	5.50	0.006
	M3	97.43	0.76				0.99	0.96	0.99	0.74	-105812	5.49	0.006
	M4			0.002	-0.002	0.74	0.99	0.96	0.99	0.74	-108576	5.46	0.006
	M5			1.338	-155.98	0.75	0.99	0.96	0.99	0.74	-107909	5.47	0.007
	M6			121.40	1.383	0.75	0.99	0.96	0.99	0.74	-108130	5.46	0.007
Pt	M1	212.66	0.79				0.99	0.96	0.99	0.73	-70769	5.42	0.009
	M2	147.47	0.78				0.99	0.96	0.99	0.73	-70954	5.41	0.009
	M3	91.74	0.78				0.99	0.96	0.99	0.73	-71036	5.41	0.010
	M4			0.003	-0.001	0.76	0.99	0.96	0.99	0.72	-72188	5.38	0.010
	M5			1.71	-190.29	0.77	0.99	0.96	0.99	0.72	-71779	5.39	0.010
	M6			120.05	1.744	0.77	0.99	0.96	0.99	0.72	-71946	5.39	0.010
Pl	M1	177.94	0.79				0.99	0.96	0.99	0.68	-31912	5.17	0.0005
	M2	126.68	0.78				0.99	0.96	0.99	0.68	-31981	5.18	0.0001
	M3	80.29	0.77				0.99	0.96	0.99	0.68	-31996	5.18	0.004
	M4			0.003	-0.002	0.75	0.99	0.95	0.99	0.68	-32941	5.12	0.003
	M5			1.351	-131.96	0.75	0.98	-0.95	0.99	0.68	-32866	5.13	0.001
	M6			98.23	1.357	0.75	0.99	0.95	0.99	0.68	-32892	5.13	0.004
Plu	M1	138.64	0.82				0.99	0.96	0.99	0.63	-24836	5.20	0.004
	M2	107.36	0.80				0.99	0.96	0.99	0.63	-24841	5.20	0.003
	M3	71.14	0.79				0.99	0.96	0.99	0.63	-24842	5.20	0.004
	M4			0.004	-0.001	0.79	0.99	0.96	0.99	0.63	-24983	5.19	0.005
	M5			3.040	-307.99	0.80	0.99	-0.96	0.99	0.63	-24963	5.19	0.005
	M6			100.51	3.545	0.80	0.99	0.96	0.99	0.63	-24994	5.19	0.004
Pay	M1	154.89	0.88				0.98	0.94	0.99	0.64	-34348	5.68	0.004
	M2	132.15	0.86				0.98	0.94	0.99	0.64	-34345	5.68	0.004
	M3	81.57	0.85				0.98	0.94	0.99	0.64	-34249	5.69	0.004
	M4			0.004	-0.001	0.85	0.98	0.94	0.99	0.64	-34381	5.68	0.001
	M5			3.443	-371.86	0.86	0.98	-0.94	0.99	0.64	-34321	5.67	0.001
	M6			127.75	4.588	0.86	0.98	0.94	0.99	0.64	-34426	5.70	0.0004

SP = Especie; R<sup>2</sup>a = Coeficiente de determinación ajustado; RMSE = Raíz del error medio cuadrático; AIC = Criterio de información de Akaike; CV = Coeficiente de variación; Ses = Sesgo promedio absoluto; Pa = *Pinus arizonica* Engelm.; Pd = *Pinus durangensis* Martínez; Pt = *Pinus teocote* Schltdl. et Cham.; Pl = *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham.; Plu = *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer.; Pay = *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen.

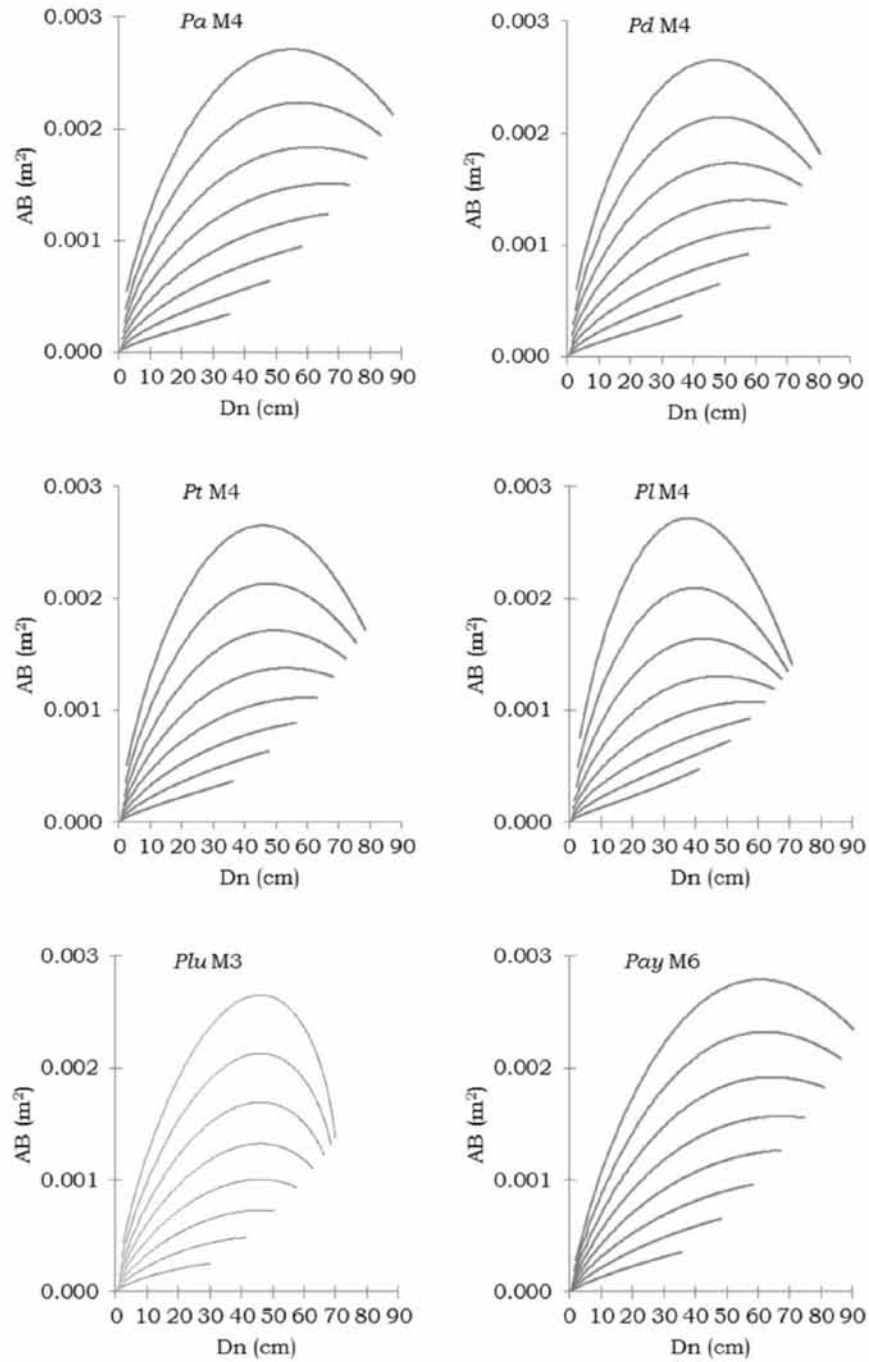
SP = species; R<sup>2</sup>a = fitted coefficient of determination; RMSE = root of the mean square error; AIC = Akaike information criterion; CV = coefficient of variation; Ses = mean absolute bias; Pa = *Pinus arizonica* Engelm.; Pd = *Pinus durangensis* Martínez; Pt = *Pinus teocote* Schltdl. et Cham.; Pl = *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham.; Plu = *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer.; Pay = *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen.



*Pa* = *Pinus arizonica* Engelm.; *Pd* = *Pinus durangensis* Martínez; *Pt* = *Pinus teocote* Schltdl. et Cham.; *Pl* = *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham.; *Plu* = *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer.; *Pay* = *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen a la edad de referencia de 60 años.  
*Pa* = *Pinus arizonica* Engelm.; *Pd* = *Pinus durangensis* Martínez; *Pt* = *Pinus teocote* Schltdl. et Cham.; *Pl* = *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham.; *Plu* = *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer.; *Pay* = *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen at the reference age of 60 years.

Figura 2. Familias de curvas de crecimiento en diámetro normal por IDiam de 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, y 45 cm.  
 Figure 2. Normal diameter growth of by 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 and 45 cm IDiam.





*Pa* = *Pinus arizonica* Engelm.; *Pd* = *Pinus durangensis* Martínez; *Pt* = *Pinus teocote* Schltdl. et Cham.; *Pl* = *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham.; *Plu* = *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer.; *Pay* = *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen a la edad de referencia de 60 años.

*Pa* = *Pinus arizonica* Engelm.; *Pd* = *Pinus durangensis* Martínez; *Pt* = *Pinus teocote* Schltdl. et Cham.; *Pl* = *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham.; *Plu* = *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer.; *Pay* = *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen at the reference age of 60 years.

Figura 3. Familias de curvas de Incremento Medio Anual (IMA) en Área Basal (AB) contra crecimiento en Dn por IDiam de 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, y 45 cm.

Figure 3. Average annual increment (IMA) curve families in Basal Area (AB) against growth in Dn by 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 and 45 cm IDiam.

Cuadro 4. Ecuaciones del incremento corriente anual (ICA) para los modelos seleccionados.

Table 4. Current annual increment (ICA) for the selected models.

Modelo	Ecuación
M3	$ICA_{M3} = - \frac{\alpha_1 \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{D_0}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_3}} \right)^{\frac{t_1}{t_0}} \right]^{\alpha_3 - 1} \alpha_3 \left[ 1 - \left( \frac{D_0}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_3}} \right]^{\frac{t_1}{t_0}} \ln \left[ 1 - \left( \frac{D_0}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_3}} \right]}{t_0}$
M4	$ICA_{M4} = \frac{\left[ \frac{t_1}{X + \beta_1 t_1 + \beta_2 t_1 X} \right]^{\beta_3}}{(X + \beta_1 t_1 + \beta_2 t_1 X) t_1} \beta_3 X$
M6	$ICA_{M6} = \frac{\beta_3 + (\beta_1 + X) \beta_2 X t_1^{-\beta_3}}{t_1 (1 + \beta_2 X t_1^{-\beta_3})^2}$

En el Cuadro 5 se presentan los tiempos de paso promedio de las clases diamétricas de 5 cm para las especies estudiadas, calculados a través del despeje de la Edad 2 ( $t_2$ ) del modelo de crecimiento seleccionado para cada especie, lo que proyecta el crecimiento en diámetro para pasar de una categoría diamétrica inferior (CDI) a una categoría diamétrica superior (CDS) y obtener la edad (años) a la que sucede el crecimiento. Los datos iniciales de Diámetro 0 y Edad 0 ( $D_0, t_1$ ) fueron los promedios de la edad por categoría diamétrica del primer cuartil de la base de datos utilizada; el Diámetro 1 ( $D_1$ ) fue la categoría diamétrica superior (CDS) para la cual se calculó el tiempo de paso (años).

Con la información de las virtutas de crecimiento, obtenidas de inventarios operativos, fue posible hacer una reconstrucción del crecimiento e incremento en diámetro de las especies forestales estudiadas, ya que se pueden calcular los incrementos individuales o el promedio para un sitio o rodal específico, la desventaja es que en algunos árboles los anillos de crecimiento no están completamente definidos (Clark *et al.*, 2007).

Los tiempos de paso indican que *Pinus ayacahuite* y *Pinus arizonica* son las especies de más rápido crecimiento, *Pinus lumholtzii* y *Pinus leiophylla* las de más lento crecimiento en diámetro, y de medio crecimiento *Pinus durangensis* y *Pinus teocote*. Para las categorías de diámetro mayores a 40 cm *Pinus lumholtzii*, *Pinus leiophylla* crecen muy lento, lo que evidencia que son especies de poca importancia comercial en contraste con *Pinus durangensis*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* y en menor

The pass times point out that *Pinus ayacahuite* and *Pinus arizonica* are the species of fastest growth; *Pinus lumholtzii* and *Pinus leiophylla* are the slowest growing species in diameter and those of medium growth, *Pinus durangensis* and *Pinus teocote*. For the diametric categories over 40 cm *Pinus lumholtzii* and *Pinus leiophylla* grow very slowly, which makes it evident that they are species of small commercial importance compared to *Pinus durangensis*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* and in a smaller amount, *Pinus teocote* are the species of greater value for the forest industry. The average pass times for diametric categories from 5 to 60 cm, calculated with the growth models were 14.2, 16.2, 16.9, 18.6, 21.5 and 12.6 years for *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* and *Pinus ayacahuite*, respectively.

The technical rotation by IDiam obtained with the IMA in Basal Area (maximal point of IMA) for the fast growing species (*Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* and *Pinus durangensis*) is found at later ages than for those slow growing species (*Pinus lumholtzii*, *Pinus leiophylla* and in a lesser extent, *Pinus teocote*), which means than the latter stop their diametric development earlier than the fast growing. For the 35 cm IDiam, the technical rotation was 159, 123, 113, 87, 98 and 169 years, when threes with diameters of 61, 52, 50, 43, 46 and 64 cm for *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* and *Pinus ayacahuite*, respectively. For the 40 cm IDiam average, for the studied species, the technical rotation occurs at 92 years old, when diameters measure 50 cm. For the 45 cm IDiam, the technical rotation takes place at 70 years old, with diameters of 49 cm (Figure 3),

medida, *Pinus teocote* son las especies de mayor valor para la industria forestal. Los tiempos de paso promedio para categorías de diámetro de 5 a 60 cm, calculados con los modelos de crecimiento fueron de 14.2, 16.2, 16.9, 18.6, 21.5 y 12.6 años para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* y *Pinus ayacahuite*, respectivamente.

El turno técnico por IDiam obtenido con el IMA en Área Basal (punto máximo de IMA) para las especies de rápido crecimiento (*Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica* y *Pinus durangensis*) corresponde a edades mayores en comparación con las de lento crecimiento (*Pinus lumholtzii*, *Pinus leiophylla* y en menor medida *Pinus teocote*), lo que significa que estas últimas cesan el desarrollo diamétrico más rápido que las primeras. Para el IDiam de 35 cm, el turno técnico fue de 159, 123, 113, 87, 98 y 169 años, cuando a dicha edad se obtuvieron árboles con diámetro de 61, 52, 50, 43, 46 y 64 cm para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla*, *Pinus leiophylla*, *Pinus lumholtzii* y *Pinus ayacahuite*, respectivamente; para el IDiam de 40 cm, en promedio se tiene que el turno técnico sucede a los 92 años, cuando los diámetros son de 50 cm. Para el IDiam de 45 cm el turno técnico ocurre a los 70 años con árboles de diámetro de 49 cm (Figura 3), lo que permite maximizar la productividad biológica y obtener árboles de mayores dimensiones en las prescripciones silvícolas (López *et al.*, 2013). Las trayectorias de los residuales obtenidos con los modelos seleccionados para cada especie indican que a medida que aumenta la edad, el residual disminuye (Figura 4); los residuales, en general no rebasan un categoría diamétrica de 5 cm, lo que evidencia la bondad de ajuste de los modelos seleccionados para las especies estudiadas.

which allows to maximize the biological productivity and get trees of greater sizes in the forestry prescriptions (López *et al.*, 2013). The tracks of the residuals from the selected models for each species indicate that as age becomes higher, the residual diminish (Figure 4); residuals, in general do not overpass a diametric category of 5 cm, which makes evident the goodness of fit of the selected models for the studied species.

Even if the results suggest that growth varies very much among species and within them by IDiam, it is possible to observe that in even-aged masses, the density of the mass must be preserved by means of low thinning. This is evident in the curves that show that the trees with greater IDiam will tend to occupy faster the growth space and leave a smaller one for the trees with lower IDiams, which will never recover growth, even if intense crown thinning is applied.

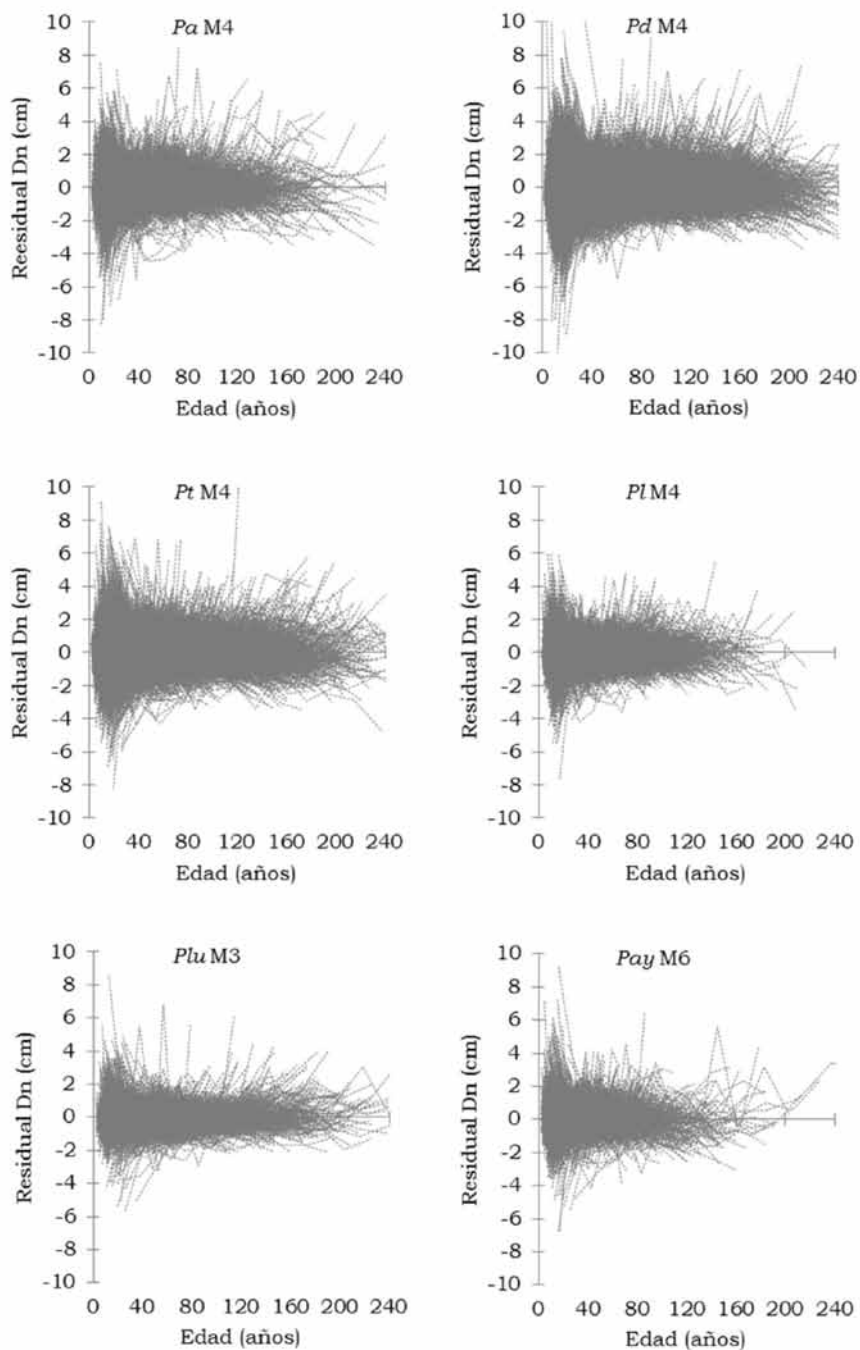
In a similar way in uneven-aged masses, it is crucial to define the IDiam. Ideally for all the trees in an uneven-aged stand, in spite of having a different size and age, should belong to the same IDiam that guarantees the maximum use of the site. Undoubtedly, somehow, models of this sort should be included, in the station quality factor, even though this would add complexity to the stated models (López *et al.*, 2013). The variation of the growth patterns implies changes in the basal area increment by IDiam, since trees with the same IDiam, but with different conditions, are not the same in the initial basal area increment (West, 1979).



Cuadro 5. Tiempos de paso promedio obtenidos con los modelos de crecimiento.  
Table 5. Average pass times from the growth models.

Categorías diamétricas		Tiempo de paso (años)					
CDI (cm)	CDS (cm)	<i>Pa</i>	<i>Pd</i>	<i>Pt</i>	<i>Pl</i>	<i>Plu</i>	<i>Pay</i>
5	10	11.3	12.4	12.1	13.38	14.15	10.97
10	15	11.7	12.9	12.3	13.57	14.45	11.07
15	20	12.0	13.0	12.9	13.81	15.41	11.25
20	25	12.2	13.5	13.4	14.37	16.21	11.29
25	30	12.8	14.3	14.0	15.23	17.52	11.38
30	35	13.2	15.0	14.8	16.13	18.85	11.95
35	40	13.5	15.8	15.9	17.08	19.85	11.97
40	45	14.1	17.0	16.9	19.20	21.94	12.16
45	50	15.0	17.8	18.8	20.48	25.86	12.70
50	55	15.2	19.9	21.4	24.38	28.26	14.24
55	60	18.1	21.9	23.6	26.78	31.97	15.63
60	65	21.8	20.8	26.9	28.61	33.30	17.03

CDI = Categoría diamétrica inferior; CDS = Categoría diamétrica superior.  
CDI = lower diametric category; CDS = higher diametric category.



*Pa* = *Pinus arizonica* Engelm.; *Pd* = *Pinus durangensis* Martínez; *Pt* = *Pinus teocote* Schltdl. et Cham.; *Pl* = *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham.; *Plu* = *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer.; *Pay* = *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen a la edad de referencia de 60 años.

*Pa* = *Pinus arizonica* Engelm.; *Pd* = *Pinus durangensis* Martínez; *Pt* = *Pinus teocote* Schltdl. et Cham.; *Pl* = *Pinus leiophylla* Schlecht. et Cham.; *Plu* = *Pinus lumholtzii* Rob. et Fer.; *Pay* = *Pinus ayacahuite* Ehrenb. var. *brachypter* Shawen at the reference age of 60 years.

Figura 4. Gráficas de residuales contra la edad para las especies estudiadas, con los modelos seleccionados.

Figure 4. Graphics of the residuals against age for the studied species, with the selected models.

Si bien los resultados sugieren que el crecimiento en diámetro es muy variable entre y dentro de especies por IDiam, una de las implicaciones del análisis es que en masas coetáneas se debe mantener la densidad mediante aclareos por lo bajo. Esto es evidente en las curvas que muestran que los árboles con IDiam mayores tenderán a ocupar más rápidamente el espacio de crecimiento y dejan poco para los individuos con IDiam menores, los cuales nunca recuperarán crecimiento, aun si se aplican aclareos intensos por lo alto.

De manera similar, en masas incoetáneas es crítico definir el IDiam. Idealmente, todos los árboles de un rodal incoetáneo, a pesar de tener tamaño y edad diferente, deberían pertenecer al mismo IDiam que garantizara el máximo uso del sitio. Sin lugar a dudas faltaría incluir, de alguna manera, a modelos de este tipo en el factor de calidad de estación, aunque ello añadiría complejidad a los modelos planteados (López *et al.*, 2013). La variabilidad de los patrones de crecimiento implica variaciones en el incremento en área basal por IDiam, ya que árboles con el mismo IDiam pero con condiciones iniciales diferentes, no son iguales en el incremento en área basal (West, 1979).

## Conclusiones

El uso del IMA en Área Basal para los modelos dinámicos de crecimiento en diámetro, ayudó a determinar los turnos técnicos por clase de IDiam, lo cual no fue posible con el crecimiento en diámetro ya que no se obtuvo el punto de cruce entre el ICA e IMA. Los turnos técnicos por IDiam sugieren que el crecimiento en diámetro cesa más rápido para *Pinus lumholtzii*, *Pinus leiophylla* y *Pinus teocote*, mientras que para *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis* y *Pinus ayacahuite* se identificaron turnos ascendentes más largos; este criterio es congruente con los tiempos de paso registrados, lo que sitúa a *Pinus ayacahuite* con los periodos más cortos, seguido de *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla* y *Pinus lumholtzii*. Para reducir los tiempos de paso para las especies de interés comercial es recomendable realizar aclareos por lo bajo en la etapa de brinzal y latizal.

Los resultados indican que *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis* y *Pinus teocote* son las taxa con más potencial maderable, por las tasas de crecimiento en diámetro, tiempos de paso y turnos técnicos; sin embargo, por la calidad de la madera y objetivos de manejo forestal, *Pinus durangensis*, *Pinus arizonica* y *Pinus teocote* son las de mayor interés comercial. Sin duda, un adecuado ajuste de la densidad permitirá ubicar una buena cantidad de árboles de alto valor maderable y un IDiam favorable por largos periodos 🌿

## Conclusions

The use of IMA in the Basal Area for the dynamic models in diameter, helped to determine the technical rotations by class of IDiam, which was not possible with diameter growth, since the crossing point between ICA and IMA was not found. The technical rotations for IDiam suggest that diametric growth stops faster for *Pinus lumholtzii*, *Pinus leiophylla* and *Pinus teocote*, while for *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis* and *Pinus ayacahuite* longer rising rotations were found; this criterion is consistent with the pass times, which puts *Pinus ayacahuite* with the shortest periods, followed by *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis*, *Pinus teocote*, *Pinus leiophylla* and *Pinus lumholtzii*. To reduce the times of pass for the commercial species it is advisable to apply low thinnings in the seedling and sapling stages.

Results indicate that *Pinus ayacahuite*, *Pinus arizonica*, *Pinus durangensis* and *Pinus teocote* have the greatest wood potential from the rate of diameter growth, times of pass and technical rotations; however, from the quality of its wood and aims of forest management, *Pinus durangensis*, *Pinus arizonica* and *Pinus teocote* are the species with higher timber potential. Undoubtedly, a right fit of the density will allow to locate a good amount of high wooden rated trees and an IDiam favorable for long periods. 🌿

## Conflict of interests

The authors declare no conflicts of interest.

## Contribution by author

Gerónimo Quiñonez Barraza: data analysis and auditing, model fit, structuring and writing of the manuscript; Héctor Manuel De los Santos Posadas: data analysis and auditing, model fit, structuring and writing of the manuscript; Juan Gabriel Álvarez González: data analysis and auditing, model fit, structuring and writing of the manuscript

## Acknowledgements

This study was accomplished with the support of the *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (Conacyt), mixed grant number 247171 from the Forest Program of the *Colegio de Postgraduados Campus Montecillo*; from the *Escuela Politécnica Superior* of Lugo of the *Universidad de Santiago de Compostela*. It was carried out thanks to the good will of the *Ejido San Diego de Tezains* to use their information.

*End of the English version*





## Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

## Contribución por autor

Gerónimo Quiñonez Barraza: análisis y auditoria de datos, ajuste de modelos y estructuración y revisión del manuscrito; Héctor Manuel De los Santos Posadas: análisis y auditoria de datos, ajuste de modelos y estructuración y revisión del manuscrito; Juan Gabriel Álvarez González: análisis y auditoria de datos, ajuste de modelos y estructuración y revisión del manuscrito.

## Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), beca mixta (247171), del Programa Forestal del Colegio de Postgraduados Campus Montecillo; de la Escuela Politécnica superior de Lugo de la Universidad de Santiago de Compostela. Este trabajo fue realizado por la gran disponibilidad del Ejido San Diego de Tezains en el uso de la información.

## Referencias

- Álvarez G., J. G., A. Zingg and K. Gadov V. 2010. Estimating growth in beech forests: a study based on long term experiments in Switzerland. *Annals of Forest Science* 67(307): 1-17.
- Amaro, A., D. Reed, M. Tome and L. Themido. 1998. Modelling dominant height growth: *Eucalyptus* plantations in Portugal. *Forest Science* 44(1): 37-46.
- Bailey, R. L. and J. L. Clutter. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science* 20:155-159.
- Barrio A., M. and U. Diéguez-Aranda. 2005. Site quality of pedunculate oak (*Quercus robur* L.) stands in Galicia (northwest Spain). *European Journal of Forest Research* 124 (1):19-28.
- Castedo D., F., U. Diéguez A. and J. G. Álvarez G. 2007. A growth model for *Pinus radiata* D. Don stands in north-western Spain. *Annals of Forest Science* 64 (4):453-465.
- Cieszewski, C. J. 2001. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Canadian Journal of Forest Research* 31 (1):165-173.
- Cieszewski, C. J. 2002. Comparing fixed- and variable-base-age site equation having single versus multiple asymptotes. *Forest Science* 48(1): 7-23.
- Cieszewski, C. J. 2004. GADA derivations of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from Richards, Weibull, and others exponential functions. Daniel B. Warnell School of Forest Resources, University of Georgia Athens, Georgia Plantation Management Research Cooperative (PMRC). Athens, GA, USA. Technical Report 2004-5. 16 p.
- Cieszewski, C. J. and R. L. Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science* 46(1):116-126.
- Cieszewski, C. J., M. Harrison and S. W. Martin. 2000. Practical methods for estimating non-biased parameters in self-referencing growth and yield models. Daniel B. Warnell School of Forest Resources, University of Georgia Athens, Georgia Plantation Management Research Cooperative (PMRC) Athens, GA, USA. Technical Report 2000-7. 11p.
- Clark, J. S., M. Wolosin, M. Dietze, I. Ibañez, S. LaDeau, M. Welsh and B. Kloeppel. 2007. Tree growth inference and prediction from diameter censuses and ring widths. *Ecological Applications* 17(7): 1942-1953.
- De los Santos-Posadas, H. M., M. Montero-Mata y M. Kanninen. 2006. Curvas dinámicas de crecimiento en altura dominante para *Terminalia amazonia* (Gmel) Exell en Costa Rica. *Agrociencia* 40 (4):521-532.
- Durbin, J. and G. S. Watson. 1971. Testing for serial correlation in least squares regression III. *Biometrika* 58(1):1-19.
- Falcao, O. A. and J. Borges G. 2005. Designing decision support tools for Mediterranean forest ecosystems management: a case study in Portugal. *Annals of Forest Science* 62 (7):751-760.
- García, E. M. 1981. Modificaciones al Sistema de Clasificación Climática de Köppen. Instituto de Geografía. Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F., México. 252 p.
- Goelz, J. C. G. and T. E. Burk. 1992. Development of a well-behaved site index equation: jack pine in north central Ontario. *Canadian Journal of Forest Research* 22(6):776-784.
- Kiviste, K., J. G. Álvarez G., A. Rojo A. y A. D. Ruiz G. 2002. Funciones de crecimiento de aplicación en el ámbito forestal. Monografía INIA: Forestal No. 4. Ministerio de Ciencia y Tecnología. Instituto Nacional de Investigación y Tecnología Agraria y Alimentaria (INIA), Madrid, España. 190 p.
- Kraft, G. 1884. Beitrage zur Lehre von den Durchforstungen. Schlagstellungen und Lichtungshieben. (Contribution to the knowledge of thinning. Clear felling and selection system). In *Durchforstungen*. Hannover, Germany. 147 p.
- Krumland, B. and H. Eng. 2005. Site index systems for major young-growth forest and woodland species in northern California. Department of Forest and Fire Protection. Sacramento, CA, USA. Forestry Report 4. 219 p.
- Levakovic, A. 1935. An analytical form of growth law. *Glasnik za sumske pokuse*. Zagreb. (In Serbo-Croat). 4:189-282.
- Lopez, L., R. Villalba and F. Bravo. 2013. Cumulative diameter growth and biological rotation age for seven tree species in the Cerrado biogeographical province of Bolivia. *Forest Ecology Management* 292: 49-55.
- López A., J., J. I. Valdez H., T. Terrazas, y J. R. Valdez L. 2006. Crecimiento en diámetro de especies arbóreas en una selva mediana subcaducifolia en Colima, México. *Agrociencia* 40: 139-147.
- Lu, J. and L. Zhang. 2011. Modeling and prediction of tree height-diameter relationships using spatial autorregressive models. *Forest Science* 57(3):252-264.
- Parresol, B. R. and J. S. Vissage. 1998. White Pine site index for southern forest survey. Res. Pap. SRS-10. Department of Agriculture, Forest Service, Southern Research Station. Asheville, NC, USA. 10 p.
- Peng, C. 2000. Growth and yield models for uneven-aged stands: past, present and future. *Forest Ecology Management* 132 (2-3):259-279.
- Pereira da Silva, R., J. Dos Santos, E. S. Tribuzy, J. Q. Chambers, S. Nakamura and H. Higuchi. Diameter increment and growth patterns for individual tree growing in Central Amazon, Brazil. *Forest Ecology Management* 166: 295-301.



- Peschel, W. 1938. Die Mathematischen Methoden zur Herleitung der Wachstums-gesetze von Baum und Bestand und die Ergebnisse ihrer Anwendung. Tharandter Forstliches Jahrbuch 89:169-247.
- Programa de Manejo Forestal (PMF). 2006. Programa de Manejo Forestal Sustentable para el Ejido San Diego de Tezains, municipio de Santiago Papasquiaro, Durango, Dgo., México. 168 p.
- Richards, F. J. 1959. A flexible growth curve for empirical use. *Journal of Experimental Botany* 10(2): 290-301.
- Statistical analysis system (SAS). 2004. SAS/ETS® User´s guide, Release 9.1 Edition SAS Institute Inc. Cary, NC, USA. s/p.
- Sharma, R. P., A. Brunner, T. Eid and O. Bernt H. 2011. Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time series and large age error. *Forest Ecology Management* 262 (12):2162-2175.
- Strand, L. 1964. Numerical construction of site curves. *Forest Science* 10(4):410-414.
- Tait, D. E., C. J. Gieszewski and I. E. Bella. 1988. The stand dynamic of lodgepole pine. *Canadian Journal of Forest Research* 18(10):1255-1260.
- Trasobares, A., T. Pukkala and J. Miina. 2004. Growth and yield model for uneven-aged mixtures of *Pinus sylvestris* L. and *Pinus nigra* Arn. in Catalonia, north-east Spain. *Annals of Forest Science* 61(1):9-24.
- Vargas L, B., J. G. Álvarez G., J. J. Corral R y O. A. Aguirre C. 2010. Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco. *Fitotecnia Mexicana*. 33(4):343-351.
- Verhulst, P.F. 1838. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*. 10: 113-121.
- Worbes, M. 1995. How to measure growth dynamics in tropical trees a review. *The International Association of Wood Anatomists Journal* 16: 337-351.
- West, P.W. 1979. Use of diameter and basal area increment in tree growth studies. *Canadian Journal of Forest Research* 10: 71-77.
- Zeide, B. 1993. Analysis of growth equations. *Forest Science* 39(3):594-616.
- Zimmerman, D. L. and V. Núñez A. 2001. Parametric modeling of growth curve data: An overview. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Test* 10(1):1-73.

